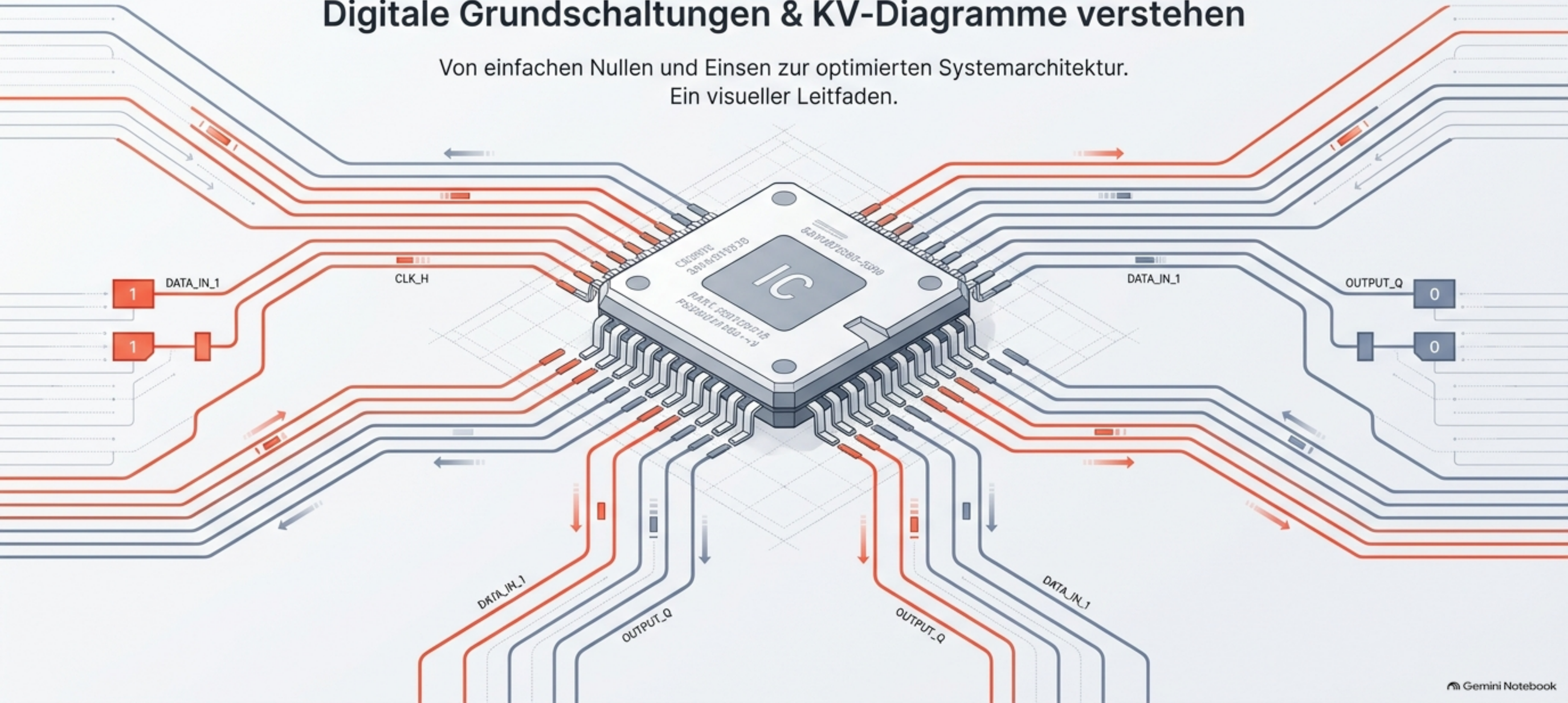


Die Architektur der Logik

Digitale Grundsaltungen & KV-Diagramme verstehen

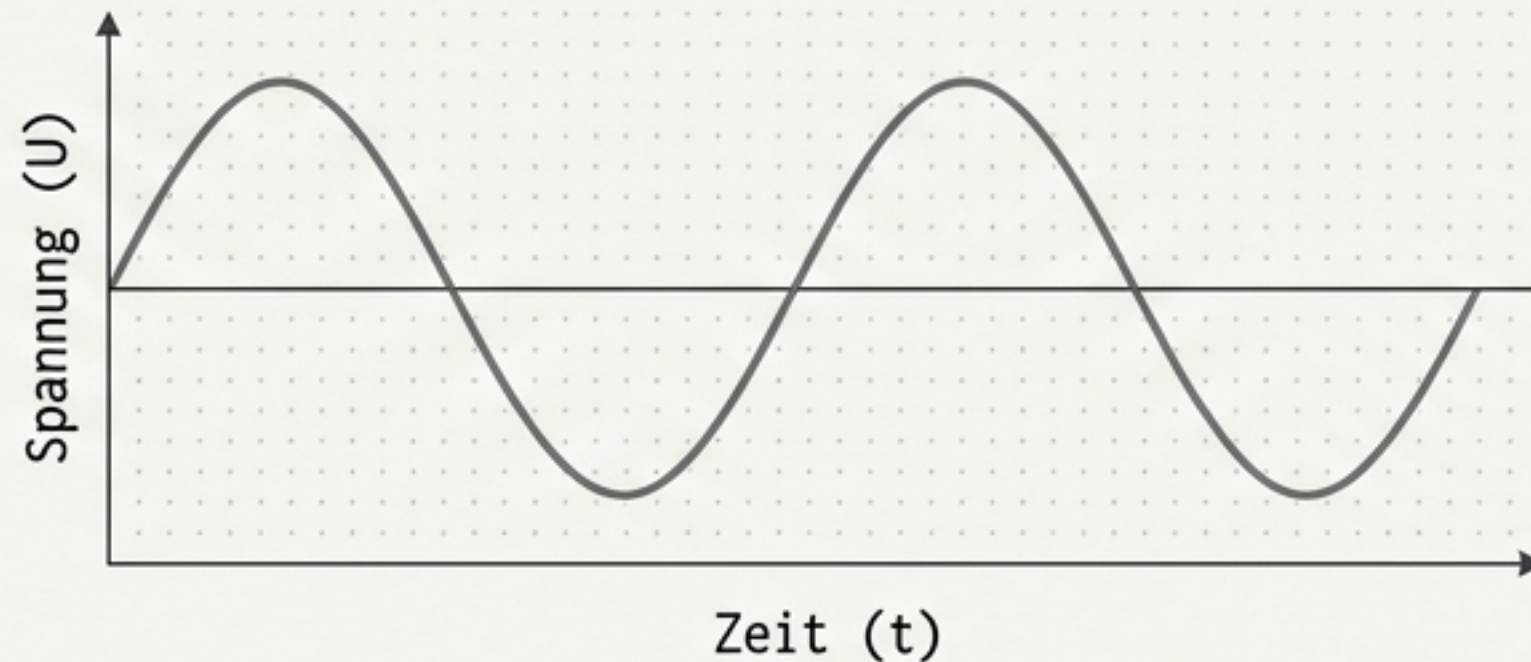
Von einfachen Nullen und Einsen zur optimierten Systemarchitektur.
Ein visueller Leitfaden.



Analog vs. Digital

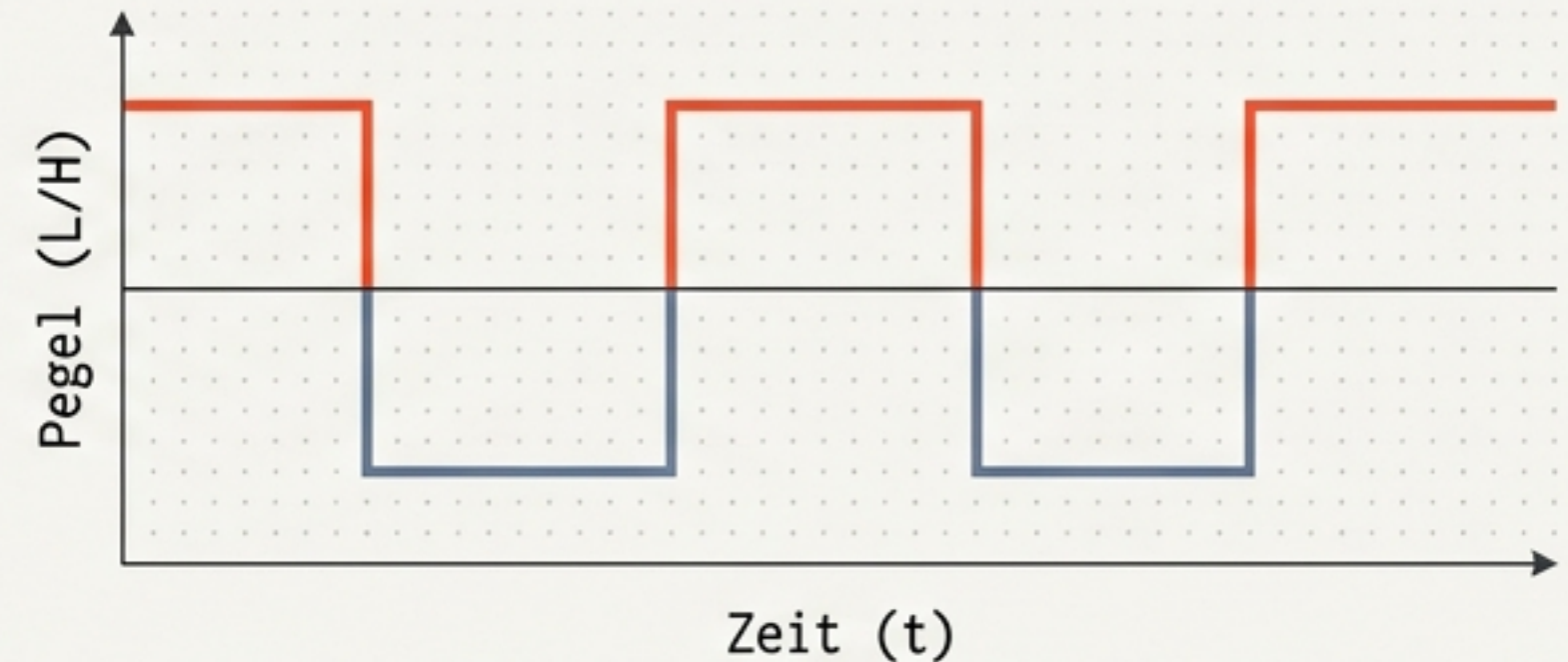
Analoge Signale

Bilden physikalische Größen stetig ab.
Unendlich viele Zwischenwerte.



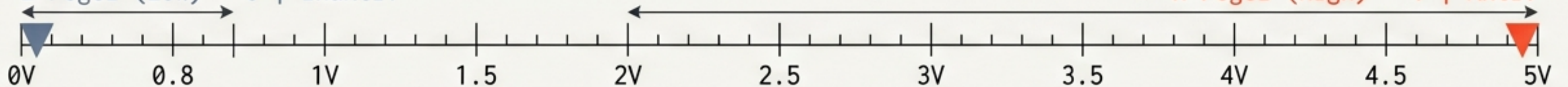
Digitale Signale

Nach DIN 19226: Abbildung auf diskrete Werte.



Die TTL-Familie & Pegel (Positive Logik)

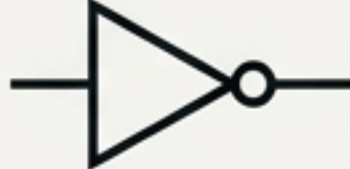
L-Pegel (Low) = 0 | Inaktiv



Beispiel: 3 Leitungen = 8 diskrete Werte (2^3). LHH = 3V.

Die Sprache der Maschinen: Boolesche Algebra

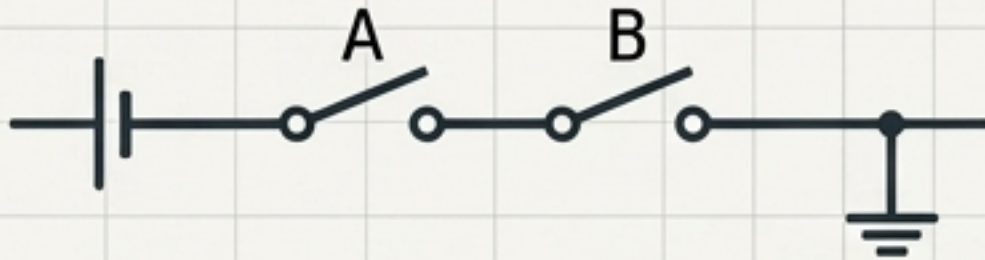
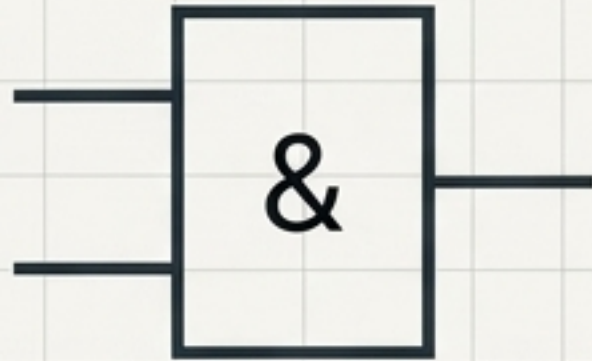
Verknüpfungen zwischen den Werten 0 und 1 der Menge $\{0, 1\}$

Cheat Sheet		
Konjunktion (UND)  $a \cdot b = a \wedge b$	Disjunktion (ODER)  $a \vee b$ (oder $a \oplus b$)	Negation (NICHT)  $\bar{a}$
Konjunktion-Regeln		Disjunktion-Regeln
$x \cdot 1 = x$ $x \cdot 0 = 0$ $x \cdot x = x$ $x \cdot \bar{x} = 0$		$x \vee 0 = x$ $x \vee 1 = 1$ $x \vee x = x$ $x \vee \bar{x} = 1$
De Morgansche Gesetze $x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$		

In der booleschen Algebra gibt es immer nur endlich viele Belegungen. Jede Gleichung ist durch unmittelbares Einsetzen überprüfbar.

Die 3 Säulen der Logik (Grundverknüpfungen)

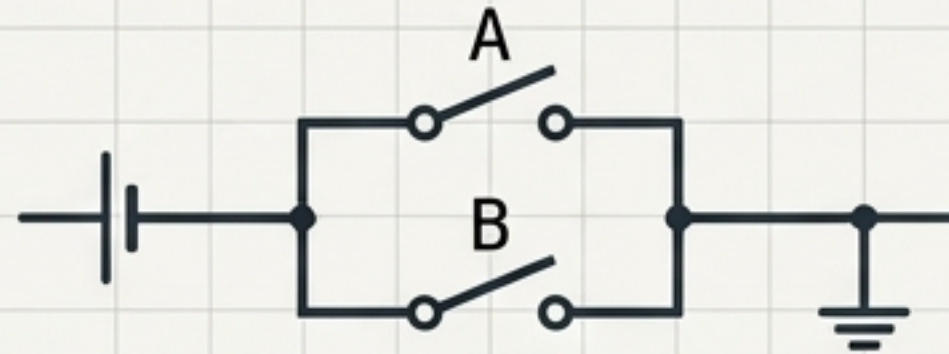
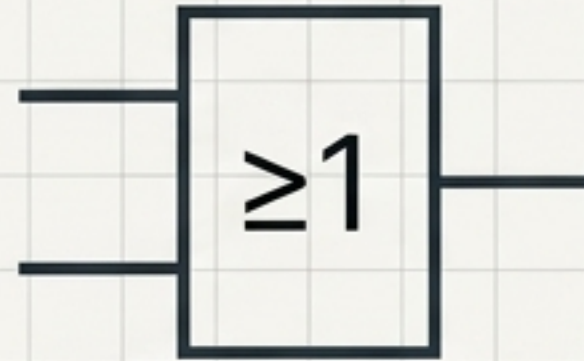
UND (AND)



Analogie: Reihenschaltung.
Strom fließt nur, wenn Schalter A UND B geschlossen sind.

Regel: Nur wahr, wenn ALLE Eingänge 1 sind.

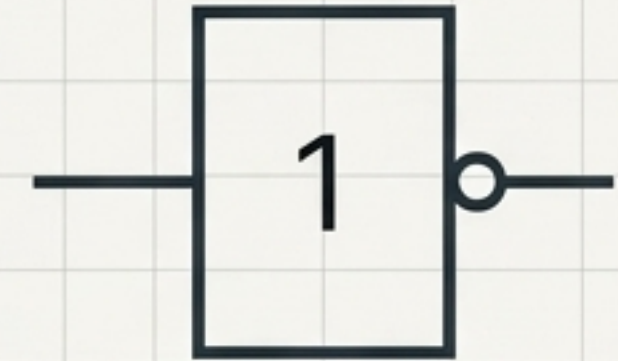
ODER (OR)



Analogie: Parallelschaltung.
Strom fließt, wenn Schalter A ODER B geschlossen ist.

Regel: Wahr, wenn MINDESTENS EIN Eingang 1 ist.

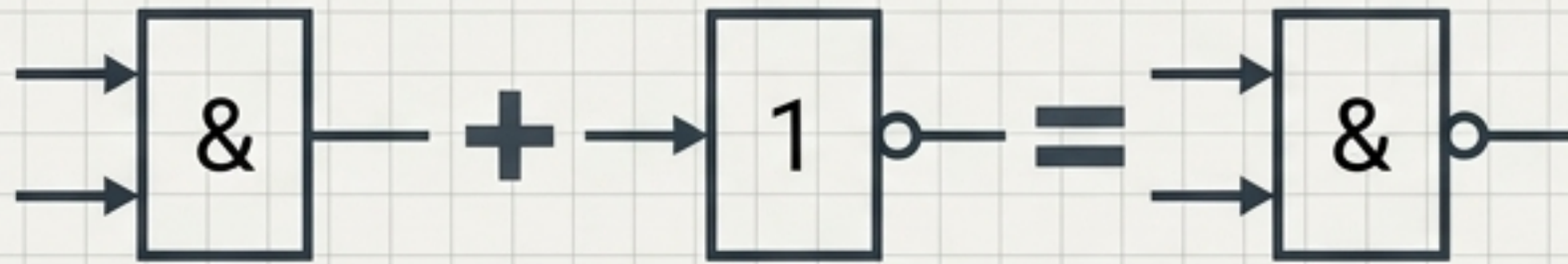
NICHT (NOT)



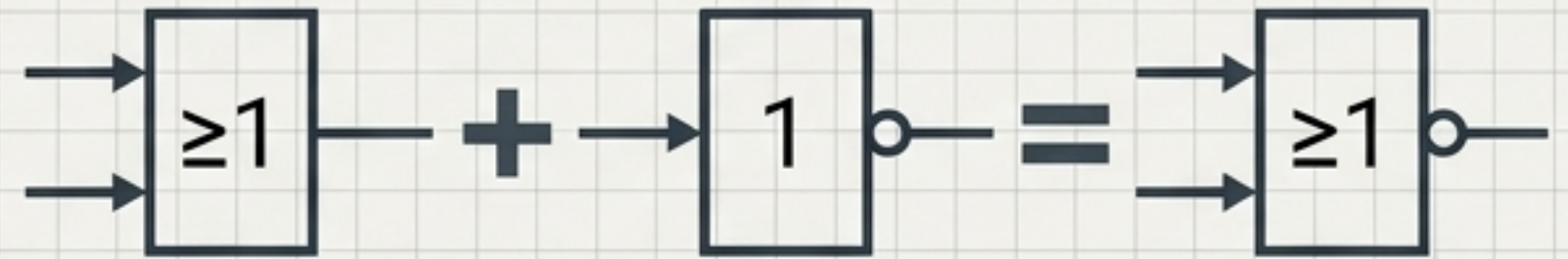
Analogie: Öffner-Kontakt.
Drücken unterbricht den Strom.

Regel: Invertiert das Signal
(Aus 1 wird 0, aus 0 wird 1).

Zusammengesetzte Gatter & Exoten

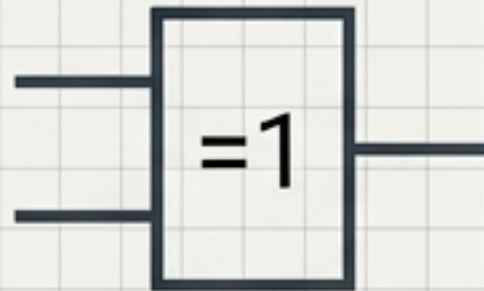


NAND (Negiertes UND):
Ausgang ist 0, wenn alle
Eingänge 1 sind.



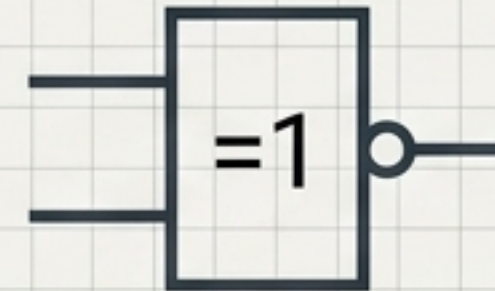
NOR (Negiertes ODER):
Ausgang ist 1, wenn alle
Eingänge 0 sind.

XOR (Exklusiv-ODER)



Antivalenz: 'Entweder-oder'. Wahr, wenn die Eingänge unterschiedlich sind.

XNOR (Exklusiv-NOR)



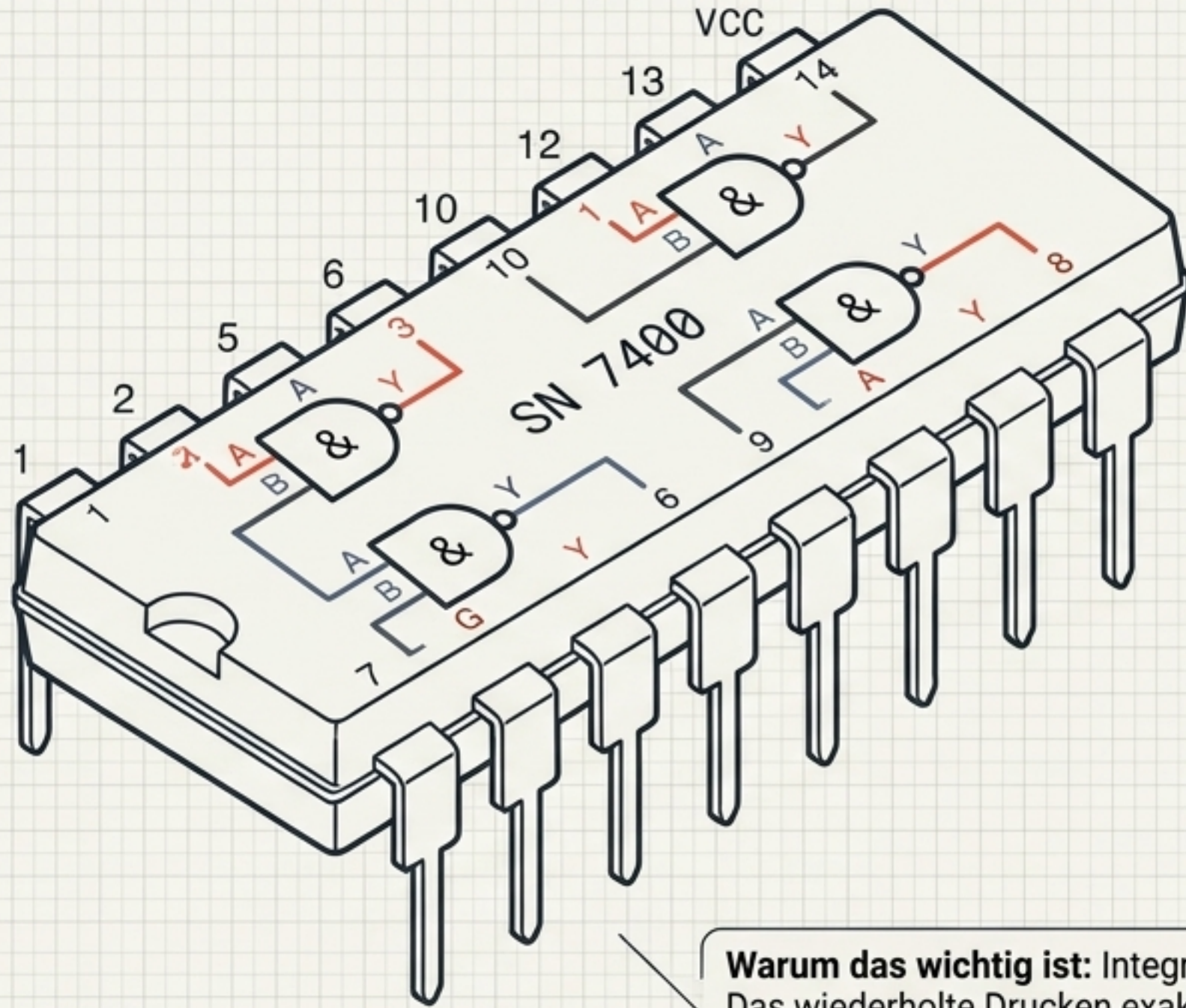
Äquivalenz: Wahr, wenn beide Eingänge gleich sind (0-0 oder 1-1).

Das ultimative Gatter-Kompendium

Gatter	IEC-Symbol	Gleichung	Wahrheitstabelle	Merksatz												
UND		$X = A \cdot B$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1, wenn ALLE 1
0	0	0														
0	1	0														
1	0	0														
1	1	1														
ODER		$X = A \vee B$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1, wenn MINDESTENS EIN 1
0	0	0														
0	1	1														
1	0	1														
1	1	1														
NICHT		$X = \bar{A}$	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	1	0	Invertiert das Signal								
0	1															
1	0															
NAND		$X = \overline{A \cdot B}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0, wenn ALLE 1
0	0	1														
0	1	1														
1	0	1														
1	1	0														
NOR		$X = \overline{A \vee B}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1, wenn ALLE 0
0	0	1														
0	1	0														
1	0	0														
1	1	0														
XOR		$X = A \oplus B$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1, wenn Eingänge UNGLEICH
0	0	0														
0	1	1														
1	0	1														
1	1	0														
XNOR		$X = \overline{A \oplus B}$	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1, wenn Eingänge GLEICH
0	0	1														
0	1	0														
1	0	0														
1	1	1														

Das NAND-Universum (Die universelle Struktur)

Jede beliebige kombinatorische Schaltung lässt sich ausschließlich aus NAND-Gattern bauen.



Warum das wichtig ist: Integrierte Schaltungstechnik.

Das wiederholte Drucken exakt gleicher NAND-Strukturen auf einen Silizium-Chip spart massiv Platz, senkt die Produktionskosten und erhöht die mittlere Lebensdauer drastisch im Vergleich zu diskreten Schaltungen.

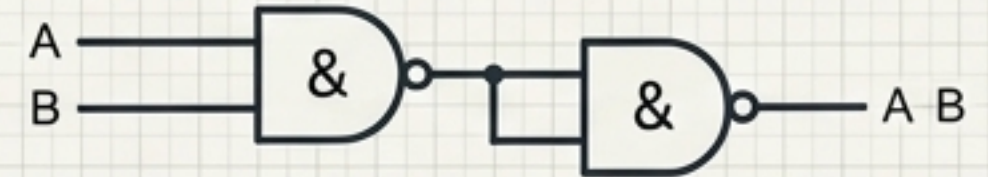
Right Side Visual Proofs (Three minimal circuit diagrams showing how to wire NANDs to simulate other gates):

Als **NICHT**:

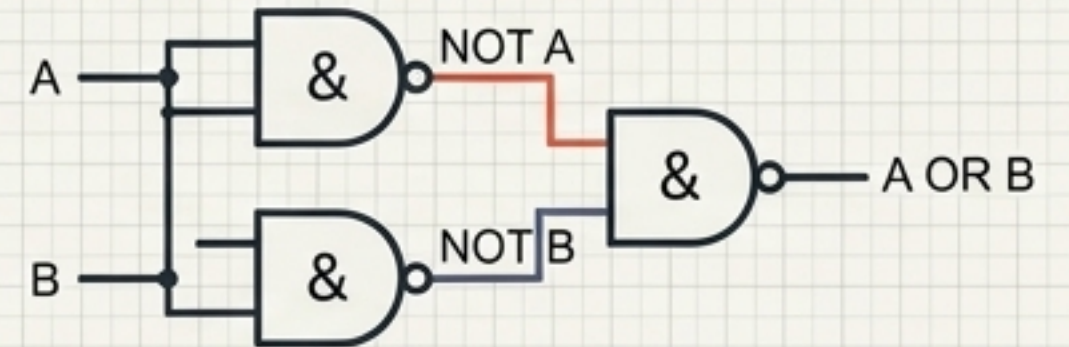


Input	Output
0	1
1	0

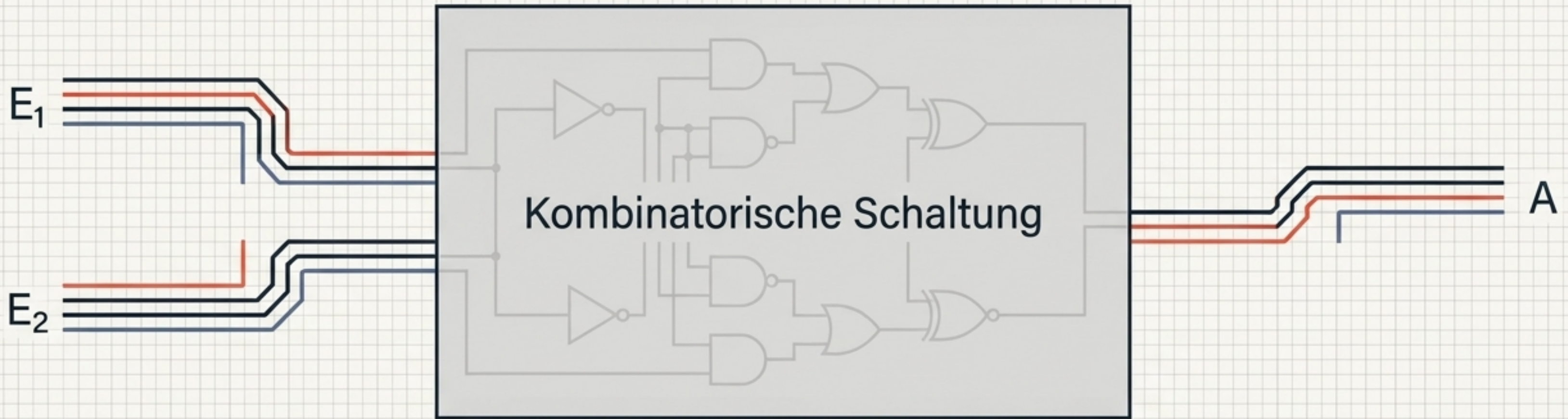
Als **UND**:



Als **ODER**:



Die Black-Box-Logik: Von Eingängen zu Ausgängen



Die Definition

Eine Schaltung mit mindestens 2 Eingangs- und 1 Ausgangsleitung. Ohne Speicher – der Ausgang hängt nur vom aktuellen Zustand der Eingänge ab.

Die Kombinatorik

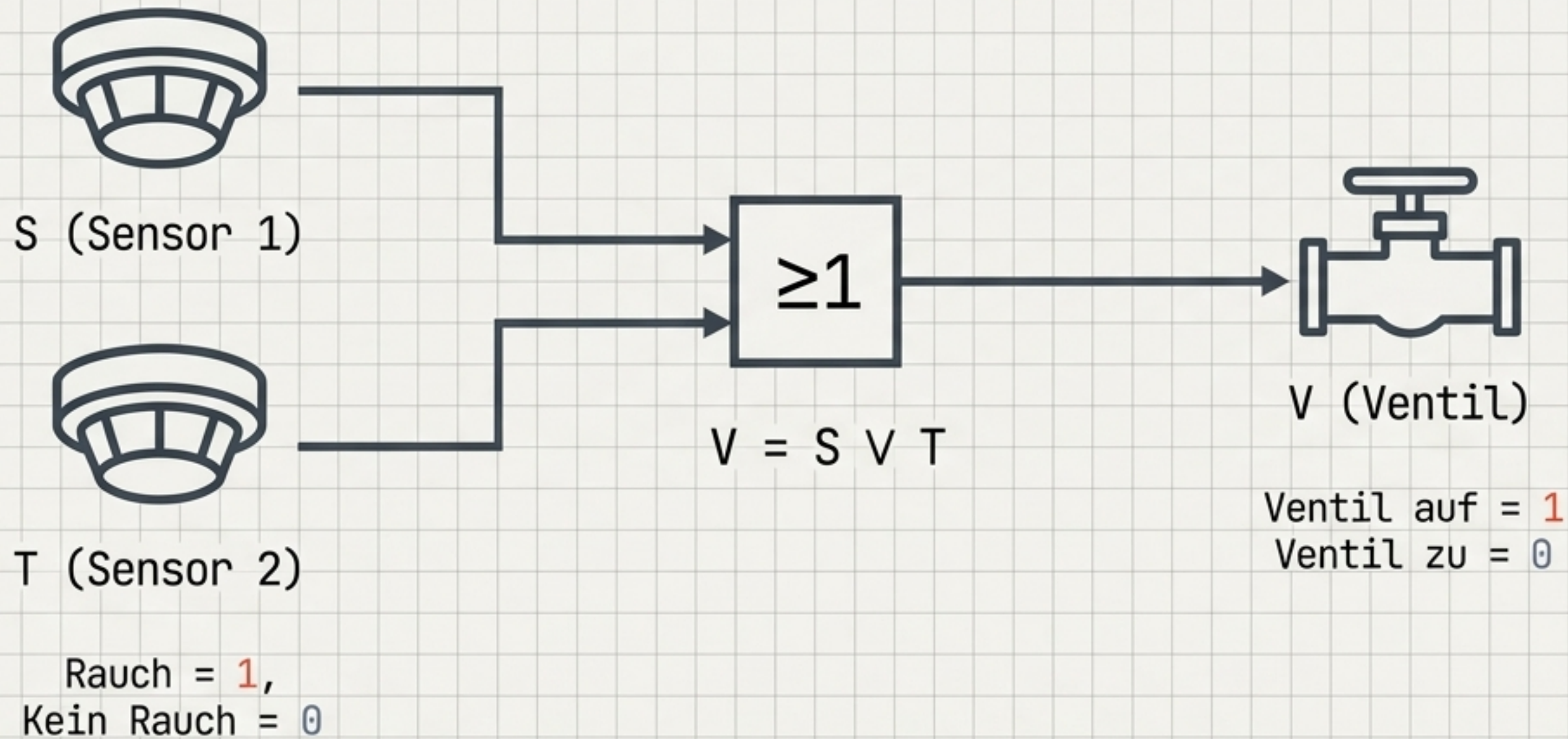
Bei n binären Eingängen gibt es exakt 2^n mögliche Eingangskombinationen.

Die Filterung

Bei 2 Eingängen gibt es 16 theoretische Belegungen, aber nur 9 'echte' Verknüpfungen (z.B. UND, ODER). Die Black Box filtert Signale strikt nach boolescher Logik.

Fallbeispiel 1: Die Sprinkleranlage

Forderung: Wenn mindestens einer der Sensoren anspricht, öffne das Ventil.



S	T	V
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fallbeispiel 2: Die Waschmaschinensteuerung

Szenario Startvorgang: Wasserzulauf öffnen

Eingaben & Bedingungen

W = Programmwahlschalter
(1 = gewählt)

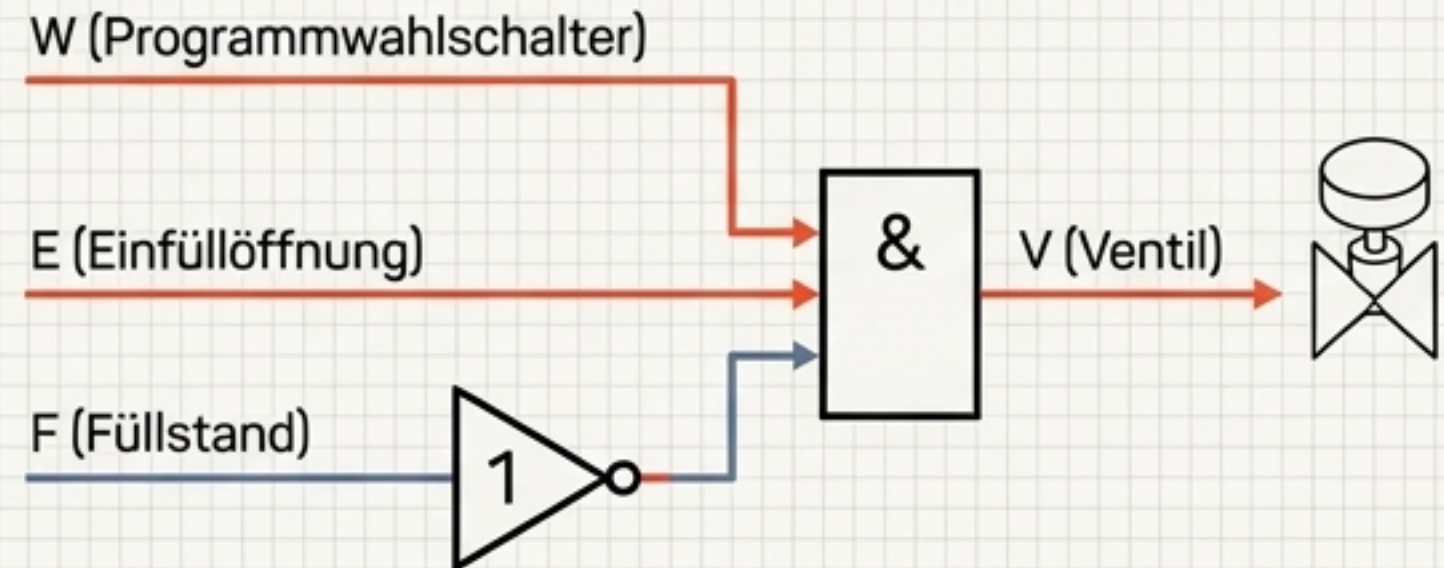
E = Einfüllöffnung
(1 = geschlossen)

F = Füllstand
(0 = noch nicht erreicht)

W	E	F	V
0	0	0	=> 0
0	0	1	=> 0
0	1	0	=> 0
0	1	1	=> 0
1	1	0	=> 1
1	0	1	=> 0
1	1	1	=> 0
1	1	1	=> 0

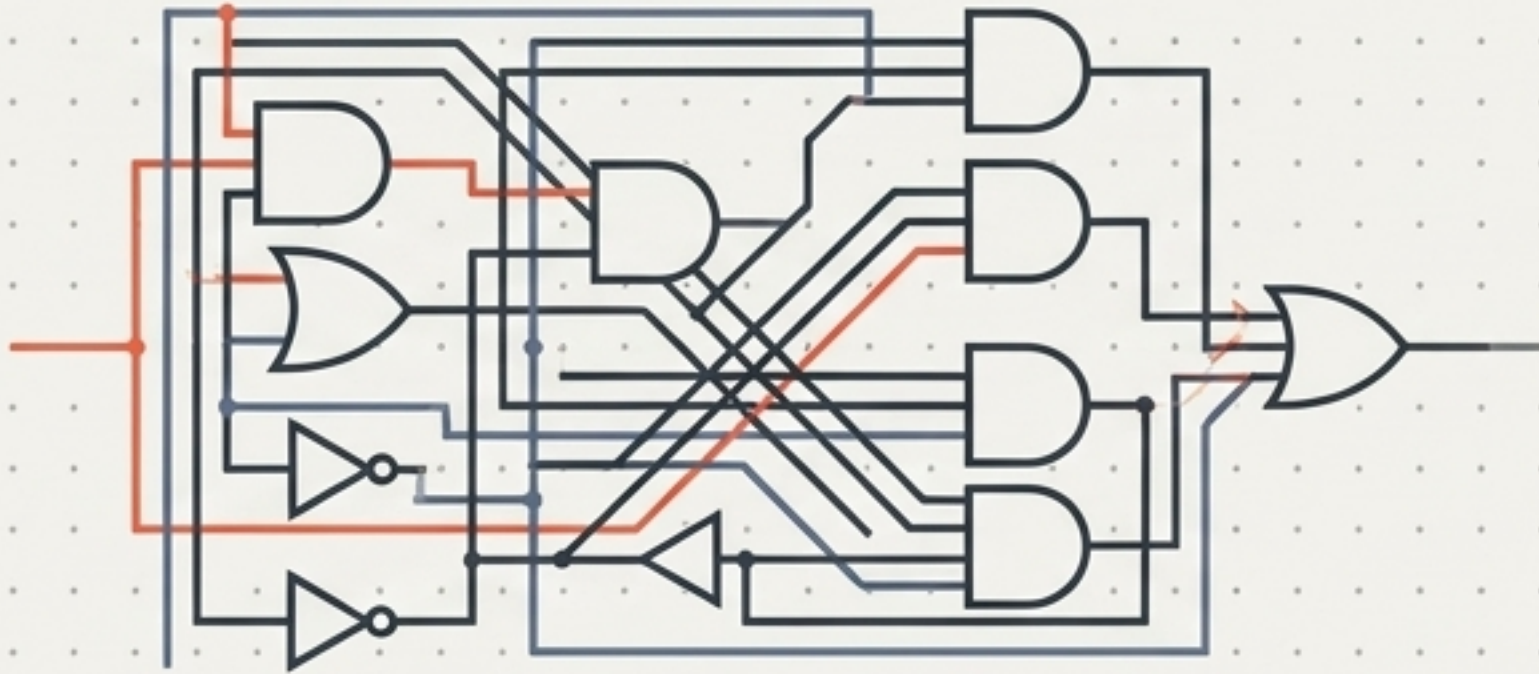
Die Logikschaltung

Gleichung: $W \cdot E \cdot \bar{F} = V$



Das Problem der Komplexität

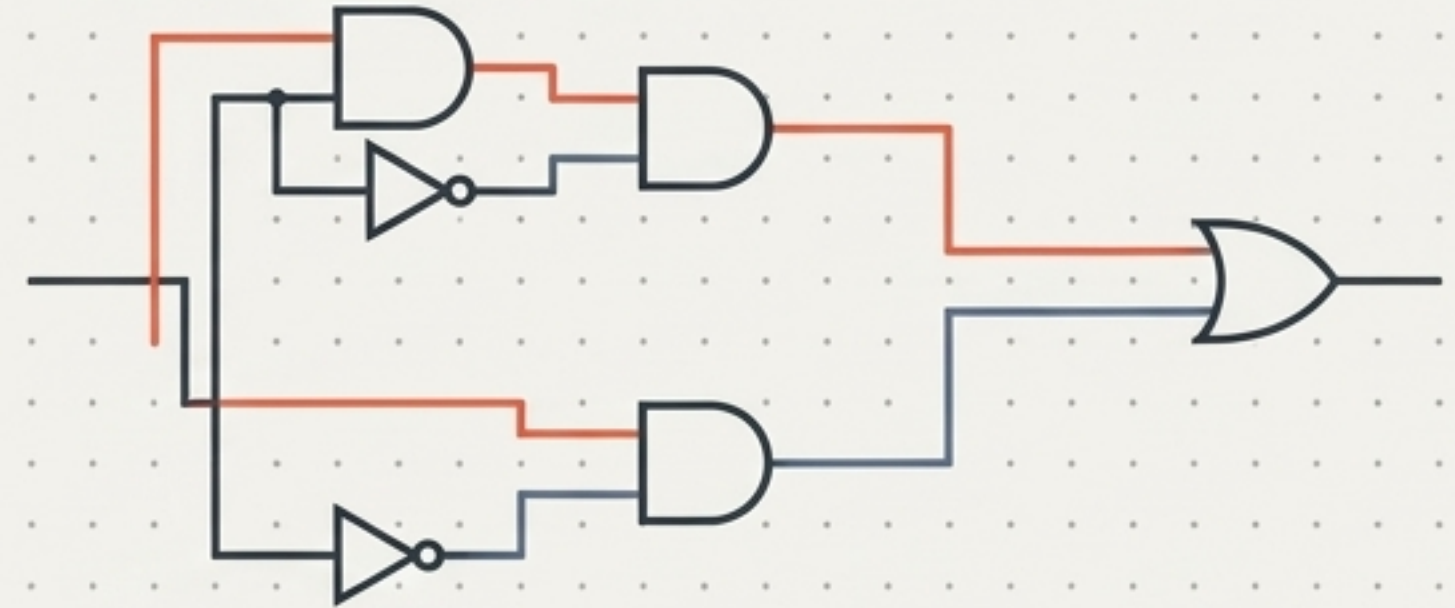
Das Problem: Direkte Umsetzung



$$X = \bar{A}BC \vee A\bar{B}C \vee ABC$$

Hoher Schaltungsaufwand, teure Hardware, hohe Fehleranfälligkeit.

Das Ziel: Schaltungssynthese



Die boolesche Gleichung minimieren, bevor auch nur ein Kabel gezogen wird.

Die Lösung liegt in der grafischen Optimierung: Das KV-Diagramm (Karnaugh-Veitch, 1952).

Die Anatomie des KV-Diagramms

Transformation einer linearen Wahrheitstabelle in ein 2D-Koordinatensystem.

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A \ B	0	1
0	0	0
1	1	1

C \ A	00	01	11	10
0				
1				

Der Gray-Code ist entscheidend:
Beim Übergang von einer Spalte zur
nächsten darf sich immer nur genau
ein Bit ändern (z.B. 01 -> 11).

Jedes Feld im Diagramm entspricht
exakt einer Zeile der Wahrheitstabelle.

Die Kunst der Blockbildung

Die 4 goldenen Regeln der grafischen Minimierung

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

1. Potenzen

Blockgrößen müssen Zweierpotenzen sein (1, 2, 4, 8, 16 Felder).

1	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0

2. Richtung & Überlappung

Blöcke dürfen nur horizontal/vertikal geformt sein (niemals diagonal). Sie dürfen sich überschneiden.

0	0	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

3. Maximalgröße

Blöcke immer so groß wie möglich machen, um Variablen maximal zu eliminieren.

1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

4. Der Pac-Man Effekt

Das Diagramm hat keine Ränder.
Gegenüberliegende Kanten gelten topologisch als benachbart (Torus).

Synthese: Von der Tabelle zur perfekten Schaltung

Schritt 1: Eintragen

D \ A \ B				
	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

Minterme (1er) eintragen.

Schritt 2: Blöcke bilden

D \ A \ B				
	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

Schritt 3: Variablen ablesen

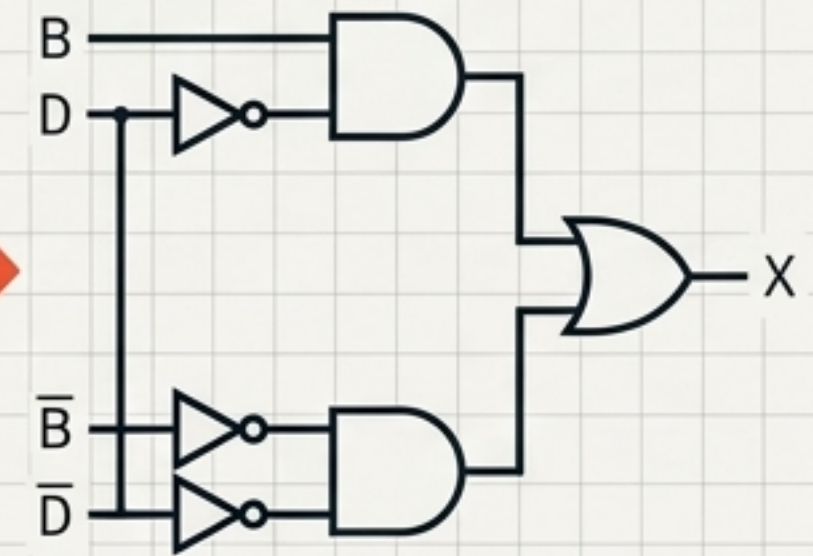
Regel: Welche Variable ändert sich im Block? Diese fällt weg!

Zentrum-Block = $B \cdot D$

Kanten-Block = $\bar{B} \cdot \bar{D}$

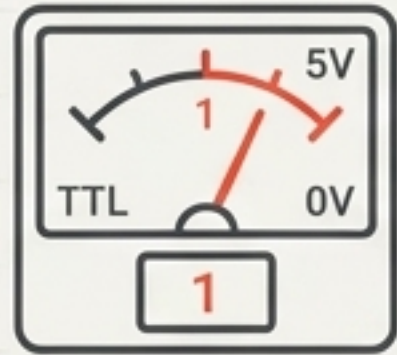
Finale minimierte DNF:
 $X = (B \cdot D) \vee (\bar{B} \cdot \bar{D})$

Schritt 4: Schaltung zeichnen



Vom Bit zum System

Zusammenfassung der Architektur

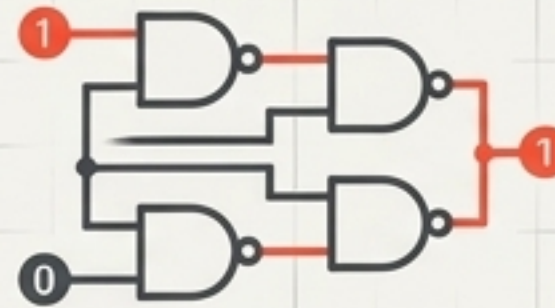


1

Das Fundament (Physik)

Wandlung diskreter
Spannungspegel in mathematische
Wahrheitswerte (0 und 1).

90°

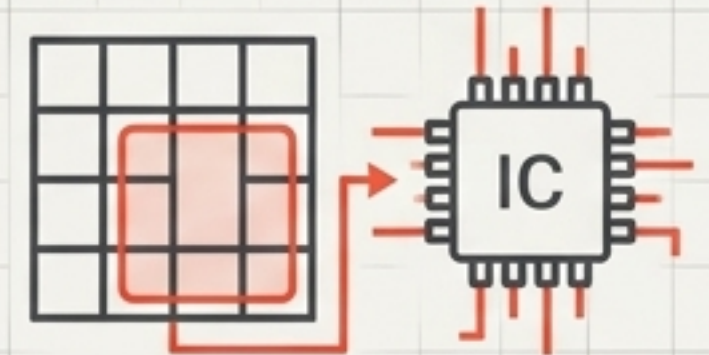


2

Die Bausteine (Logik)

Übersetzung boolescher Algebra
in schaltbare Hardware-Gatter
(Universal-NAND).

45°



3

Die Meisterklasse (Architektur)

Schaltungssynthese und
Kostenoptimierung komplexer
Systeme.

Der Horizont: Sequenzielle Schaltungen

Nächster logischer Schritt: Die Einführung von Zeit und
Gedächtnis durch Speicher und Flipflops.